ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ ANH

VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ ANH

VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. NÔNG QUỐC CHINH

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Mở đầu

Giải hệ phương trình là một phần quan trọng trong chương trình toán THPT và trong các chuyên ngành Đại số, Giải tích. Khi đề cập đến việc giải hệ phương trình, học sinh trung học cơ sở dễ dàng tìm được các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính như giải hệ bằng phương pháp cộng đại số, phương pháp thế của học sinh lớp 9, hay sử dụng định thức của lớp 10. Tuy nhiên, đối với hệ phương trình phi tuyến, gần như có rất ít tài liệu nghiên cứu sâu về lĩnh vực này. Trong các kì thi học sinh giỏi các cấp, các kì thi Olympic trong nước và quốc tế, các hệ phương trình phi tuyến thường là loại khó và ít có định dạng cũng như phương pháp giải cụ thể. Vì vậy học sinh gặp rất nhiều khó khăn trong việc giải các bài toán về hệ phương trình phi tuyến trong chương trình toán phổ thông và trong các kì thi học sinh giỏi các cấp.

Đề tài luận văn nghiên cứu một số hệ phương trình phi tuyến thường gặp trong chương trình toán phổ thông và các phương pháp giải hệ phương trình này cũng như ứng dụng của chúng dùng trong ôn luyện học sinh giỏi lớp 9 và ôn thi tuyển sinh vào lớp 10 đặc biệt là dành cho học sinh ôn thi chuyên toán.

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được trình bày gồm ba chương:

Chương 1. Một số kiến thức bổ trợ về hệ phương trình.

Chương này trình bày các kiến thức bổ trợ, các khái niệm, định nghĩa cơ bản về hệ phương trình, tập nghiệm của hệ phương trình nói chung và hệ phương trình phi tuyến nói riêng.

Chương 2. Những phương pháp thường dùng để giải hệ phương trình phi tuyến.

Chương 2, trình bày các dạng toán thường gặp của hệ phương trình phi tuyến và cách giải chúng được tìm hiểu qua các tài liệu [1], [2], [3], [4], [5].

Chương 3. Một số ứng dụng của hệ phương trình phi tuyến.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên với sự hướng dẫn của PGS.TS. Nông Quốc Chinh. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm hướng dẫn của thầy, tới các thầy cô trong Ban giám hiệu, Phòng đào tạo và Khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học. Đồng thời tác giả xin được cảm ơn các anh chị cùng khóa đã chỉ bảo, hướng dẫn cho tác giả học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 4 năm 2017.

Học viên

Nguyễn Thị Anh

Chương 1

Một số kiến thức bổ trợ về hệ phương trình

Chương này tôi xin trình bày các kiến thức bổ trợ, các khái niệm, định nghĩa cơ bản về hệ phương trình, tập nghiệm của hệ phương trình nói chung và hệ phương trình phi tuyến nói riêng.

1.1 Hệ phương trình tuyến tính (xem [3])

1.1.1 Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Định nghĩa 1.1. Cho $\mathbb{K}$ là một trường. Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hệ số trên trường $\mathbb{K}$ là hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

hay có thể viết gọn hơn:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}x_k) = b_i, i = 1, \ldots, m.$$

Trong đó a_{ik}, b_i là các phần tử thuộc trường $\mathbb{K}$, a_{ik} gọi là hệ số của ẩn x_k, b_i là hệ số tự do, $i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, n$.

Hệ phương trình (1.1) gọi là hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

Đặc biệt nếu $b_1 = \ldots = b_m = 0$ thì hệ (1.1) có dạng

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}x_k) = 0, i = 1, \ldots, m.$$

được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

1.1.2 Một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

1.1.2.1 Quy tắc Cramer

Định nghĩa 1.2. Một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn và ma trận A của hệ có định thức $|A| \neq 0$ được gọi là hệ Cramer.

Định lý 1.1. Định lý Cramer (Cramer's rule – công thức xác định công thức nghiệm của hệ Cramer)

Hệ Cramer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Là một hệ xác định. Nghiệm duy nhất của hệ được xác định bởi công thức

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}(6)$$

Trong đó $\Delta = |A|$ và

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Công thức (6) được gọi là công thức Cramer.

Chú ý: Định thức Δ_j là định thức của ma trận nhận được từ ma trận A của hệ (1.2) bằng cách thay các phần tử ở cột thứ j (Hệ số của ẩn x_j) bởi các phần tử $b_1, \cdots, b_n$ (Các hệ số tự do).

Định lý 1.2. Hệ n phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn số

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0, i = 1, \ldots, n$$

chỉ có nghiệm tầm thường $\Theta = (0, \cdots, 0)$ khi và chỉ khi định thức $|A| \neq 0$.

Ví dụ 1.1 (Xem [4])**.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \cdots + nx_1 = 2 \\ \cdots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \cdots + nx_{n-1} = n \end{cases}$$

(Đề thi OLYMPIC Toán Sinh viên năm 1999)

Bài giải.

Cộng tất cả các phương trình của hệ, suy ra

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

Tiếp theo, lần lượt lấy phương trình thứ k trừ cho phương trình thứ $k-1 (1 < k < n)$; trừ phương trình thứ n cho phương trình thứ nhất. Suy ra

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - nx_n = k - (k+1) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n - nx_n = n - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_k = \dfrac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{2}{n} \\ x_n = -\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{2-n}{n} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x_k = \dfrac{2}{n} \\ x_n = \dfrac{2-n}{n} \end{cases}$ Với $k = 1, 2, \cdots, n-1$.

Ví dụ 1.2 (xem [4])**.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_{2001} + bx_{2002} = 1 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_{2001} + bx_{2002} = 2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_{2001} + ax_{2002} = 2002 \end{cases}$$

Tìm điều kiện của a đối với b để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

(Đề thi OLYMPIC toán Sinh viên 2002)

Bài giải.

Kí hiệu D là định thức của hệ phương trình. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ \cdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}_{2002\times 2002}$$

Cộng tất cả các cột với cột đầu tiên, ta có

$$(a+2001b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b & b \\ 1 & a & b & \cdots & b & b \\ \cdots \\ 1 & b & \cdots & a & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}_{2002\times 2002}$$

(Nhân hàng đầu với -1 rồi cộng vào các hàng còn lại)

$= (a+2001b).(a-b)^{2001}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq b$ và $a \neq -2001b$.

1.1.2.2 Thuật toán Gaoxơ (Gauss)

Trong đại số tuyến tính, thuật toán Gauss là một thuật toán có thể được sử dụng để tìm nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính, tìm hạng (hay rank) của một ma trận, để tính ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông khả nghịch. thuật toán Gauss được đặt theo tên của nhà toán học Đức là Carl Friedrich Gauss.

• Nội dung của thuật toán Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính là : Thực hiện liên tiếp các phép biến đổi tương đương để từ hệ phương trình (1.1) ban đầu chúng ta nhân được một hệ mới tương đương có số phương trình ít hơn, và có dạng bâc thang sau:

$$\begin{cases} a'_{11}x_{i1} + a'_{12}x_{i2} + \cdots + a'_{1r}x_{ir} + \cdots + a'_{1n}x_{in} = b'_1 \\ a'_{22}x_{i2} + \cdots + a'_{2n}x_{ir} + \cdots + a'_{2n}x_{in} = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a'_{rr}x_{ir} + \cdots + a'_{rn}x_{in} = b'_r \end{cases}$$

Trong đó $x_{ij}(j = 1, \cdots, n)$ là một hoán vị nào đó của các ẩn $x_i, (i = 1, \cdots, n); a_{ik} \neq 0$ với $k = 1, \cdots, r$.

• Các trường hợp sau có thể xảy ra:

Trường hợp 1: Nếu trong quá trình biến đổi gặp phương trình vô nghiệm dạng $0x_1 + \cdots + 0x_n = b, b \neq 0$, thì ta dừng lại và kết luận hệ vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $r = r$, khi đó phương trình cuối cùng của hệ có dạng $a'_{mn}x_{i_n} = b'_n$. Hệ (1.6) là một hệ Cramer, do đó hệ có duy nhất một nghiệm. Có thể tìm nghiệm đó bằng cách giải từng phương trình của hệ (1.6) từ dưới lên và thay thế dần giá trị của các ẩn tìm được từ phương trình dưới vào các phương trình trên.

Trường hợp 3 : Nếu $r < n$ thì hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm. Để giải hệ 1.6 ta có thể xem các ẩn $x_{i_{r+1}}, \cdots, x_{i_n}$ là các tham số (lấy giá trị tùy ý) và chuyển các số hàng chứa các ẩn đó sang vế phải; rồi dùng phương pháp ở trường hợp 2 đối với các ẩn $x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}$ xem $x_{i_{r+1}}, \cdots, x_{i_n}$ là tham số. Trong thực tế để biến đổi hệ phương trình tuyến tính 1.1 ban đầu về dạng bậc thang, người ta thường thực hiện các phép biến đổi tương đương trên ma trận bổ sung A'. Các phép biến đổi đó được gọi là các phép biến đổi sơ cấp.

Ví dụ 1.3 (xem [3])**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{a}{2004} \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{a + x_1}{2005^2 - 2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{a + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{2005^n - 1} \end{cases}$$

(Đề thi OLYMPIC toán Sinh viên 2002)

Bài giải.

Cộng thêm biểu thức $x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1}$ vào cả hai vế của phương trình thứ i của hệ đã cho, với $i = 2, 3, \cdots, n$, ta có

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a + x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1}}{2005^i - 1} + x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2004} = \frac{a}{2005^i - 1}\left(\frac{2005^i - 2005}{2004}\right)$$

Vậy với $i = 2, 3, \cdots, n$

$$x_i = (x_1 + x_2 + \cdots + x_i) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1})$$
$$= \frac{a}{2005^{i+1}}.\frac{2005^{i+1} - 2005}{2004} - \frac{a}{2005^i}.\frac{2005^i - 2005}{2004}$$
$$= \frac{a}{2005^i}$$